

主専攻実験
数理モデリングとアルゴリズム

発展課題3：波のシミュレーション

1 はじめに

本実験では水面のような2次元の波の時間発展を解析する。波は後述する波動方程式と呼ばれる2階偏微分方程式で支配されている。波は様々な分野で現れ、例えば電磁波や、空間を伝播する音波などがある。これらの分野では、波の振幅を最小または最大にするように設計を行い、騒音を減少させたり、電磁波の受信を効率よくしたりすることがある。これらの数値解析には様々な手法が用いられるが本実験では初歩的な中心差分を用いた差分法を用いて、数値解析を行い有名な物理実験である干渉縞の発生を目標とする。

2 波動方程式

この世に存在するあらゆる波は以下の2階偏微分方程式に従う。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) = v^2 \Delta u.$$

ここで、 v [m/s] は波の群速度を表す。群速度とは、波の1点の速度ではなく波全体の速度のことである。以下に、1次元の場合の波動方程式を示す。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t).$$

2.1 中心差分

$f(x)$ を x' 周りでテイラー展開すると以下のようになる。

$$f(x' + h) = f(x') + \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x'} h + O(h^2).$$

ここで、上式から $f(x')$ を引いて h で割ると、

$$\begin{aligned} \frac{f(x' + h) - f(x')}{h} &= \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x'} + O(h), \\ \frac{f(x' + h) - f(x')}{h} &\approx \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x'}. \end{aligned}$$

となり、微分値の近似値が得られる。この手法は差分法と呼ばれ、特に前進差分と呼ばれる。上式の通り、前進差分の誤差は h に比例する。つまり、 h が 10^{-2} であれば、解は 10^{-2} 程度の有効桁数しか持ち得ない。そのため、良い近似精度を得るためには h を小さくする必要がある。2階の微分係数を得るには、 $f(x' + h)$ と $f(x' - h)$ のテイラー展開を考える。

$$\begin{aligned} f(x' + h) &= f(x') + \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x'} h + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right|_{x=x'} h^2 + \frac{1}{6} \left. \frac{d^3 f(x)}{dx^3} \right|_{x=x'} h^3 + O(h^4), \\ f(x' - h) &= f(x') - \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x'} h + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right|_{x=x'} h^2 - \frac{1}{6} \left. \frac{d^3 f(x)}{dx^3} \right|_{x=x'} h^3 + O(h^4). \end{aligned}$$

これらの和を取ると，

$$\begin{aligned} f(x' + h) + f(x' - h) &= 2f(x') + \left. \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right|_{x=x'} h^2 + O(h^4), \\ \frac{f(x' + h) + f(x' - h) - 2f(x')}{h^2} &= \left. \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right|_{x=x'} + O(h^2), \\ \frac{f(x' + h) + f(x' - h) - 2f(x')}{h^2} &\approx \left. \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right|_{x=x'}. \end{aligned}$$

となる．この手法は中心差分と呼ばれ，前進差分と比較すると誤差が h から h^2 に変化する．これにより，小さな h でも前進差分と比較すると良い近似精度が得られる．

2.2 波動方程式の求解

波動方程式を上記の中心差分で時間方向，空間方向にそれぞれ差分近似すると以下のようになる．

$$\frac{u(x, t + \Delta t) + u(x, t - \Delta t) - 2u(x, t)}{\Delta t^2} = v^2 \frac{u(x + \Delta x, t) + u(x - \Delta x, t) - 2u(x, t)}{\Delta x^2}$$

ここで，時刻 t 以下の関数値は既知とし，次の時刻 $t + \Delta t$ の関数値を求めたい．そのため，式を整理すると，

$$u(x, t + \Delta t) = v^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \{u(x + \Delta x, t) + u(x - \Delta x, t) - 2u(x, t)\} - u(x, t - \Delta t) + 2u(x, t)$$

となり，既知の関数値から次の時刻の関数値を得られることになる．

計算機では実数空間を表すことは不可能であるため，空間及び時間を離散化し計算を行う．以下では x, t を離散化したものとし， x の定義域を $0 \leq x \leq L$ ， t の定義域を $0 \leq t \leq T$ とする．これらを刻み幅 $\Delta x, \Delta t$ で離散化し， $x_1^{(1)} = u(0, 0)$ ， $x_2^{(1)} = u(\Delta x, 0)$ ， \dots ， $x_N^{(0)} = u(L, 0)$ と表す．時間方向でも同様である．そうすると，上式は，以下のようになる．

$$u_i^{(j+1)} = v^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \{u_{i+1}^{(j)} + u_{i-1}^{(j)} - 2u_i^{(j)}\} - u_i^{(j-1)} + 2u_i^{(j)}.$$

ここで，問題となるのは $i + 1 > N$ となる場合や， $i - 1 < 1$ となる場合である．計算機上では領域を有限とするため，境界上ではある条件を課さなければ計算することができない．そのため， $u_N^{(j)}$ や $u_1^{(j)}$ は上述した更新式ではなく，別に用意した境界条件で更新を行う．また，2ステップ目を計算するためには0,1ステップ目の関数値も必要であるため，こちらも予め計算しておく必要がある．これを初期条件と呼ぶ．

2.2.1 境界条件

境界条件には，関数値を直接指定するディリクレ (Dirichlet) 境界条件と関数の微分値を指定するノイマン (Neumann) 境界条件の2つが存在する．それぞれ，数式上では以下のように表される．

$$\begin{aligned} f(x) &= x_0, \quad x \in \Gamma, \quad (\text{Dirichlet boundary condition}) \\ \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x} &= x_0, \quad x \in \Gamma. \quad (\text{Neumann boundary condition}) \end{aligned}$$

ここで、 Γ は境界を表す。ディリクレ境界条件の場合は、離散化した状態で、

$$u_1^{(j)} = A_1^{(j)}, u_N^{(j)} = A_2^{(j)}$$

と表される。ノイマン境界条件の場合は、微分の差分近似を利用し、

$$u_1^{(j)} = u_2^{(j)} - B_1^{(j)} \Delta x, u_N^{(j)} = u_{N-1}^{(j)} - B_2^{(j)} \Delta x$$

となる。1次元の弦の波を考えると、ディリクレ境界条件は固定端に対応し、ノイマン境界条件は自由端に対応する。

2.2.2 初期条件

初期条件の与え方として、0ステップ目をディリクレ条件で与え、1ステップ目をノイマン条件から計算する方法と、0,1ステップ目を直接ディリクレ条件で与える方法がある。本実験では前者の方法を用いる。

0ステップ目は直接関数値を与え、1ステップ目の計算にはそれぞれの $u_i^{(0)}$ と速度 $v_i^{(0)} = \frac{\partial u}{\partial t}$ を与える。1ステップ目の計算には、 $u(x, t + \Delta t)$ のテイラー展開を考える。

$$u(x, t + \Delta t) = u(x, t) + \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Delta t^2 + O(\Delta t^3).$$

ここで、波動方程式より

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

であるため、中心差分を用いると

$$u_i^{(1)} = u_i^{(0)} + v_i^{(0)} \Delta t + \frac{v^2 \Delta t^2}{2 \Delta x^2} (u_{i-1}^{(0)} + u_{i+1}^{(0)} - 2u_i^{(0)})$$

と計算できる。

3 実験課題

3.1 実験課題 1：1次元波動方程式の解析

本実験課題では1次元の弦の振動をシミュレーションで再現する。長さは $L = 1$ とし、101点で離散化する（つまり、 $\Delta x = 0.01$ となる）。時間は $T = 10$ とし、 $\Delta t = 0.001$ とする。初期条件として、

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \exp\left(-\frac{(x - L/2)^2}{0.1^2}\right), \\ v(x, 0) &= 0 \end{aligned}$$

を用いる。群速度は $1[\text{m/s}]$ とせよ。境界条件は、ディリクレ条件である

$$u_0^{(j)} = 0, u_N^{(j)} = 0$$

と、ノイマン条件である

$$u_0^{(j)} = u_1^{(j)}, u_N^{(j)} = u_{N-1}^{(j)}$$

を用いて、境界条件の変更による計算結果を比較せよ。

3.2 実験課題 2 : 2 次元への拡張

実験課題 X-1 で実装した 1 次元の波動方程式を差分近似で求解するプログラムを 2 次元の波動方程式へ拡張せよ . 2 次元への拡張は , 前述のテイラー展開を x 軸 , y 軸に対してそれぞれ行ったものを足せば良い . 多変数関数の 1 変数テイラー展開は以下のように表される .

$$\begin{aligned}f(x + \Delta x, y) &= f(x, y) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x,y} \Delta x + \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{x,y} \Delta x^2 + O(\Delta x^3), \\f(x, y + \Delta y) &= f(x, y) + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{x,y} \Delta y + \left. \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right|_{x,y} \Delta y^2 + O(\Delta y^3).\end{aligned}$$

本実験課題では , 以下のようにモデリングされた 2 次元の波をシミュレーションする . 刻み幅及び領域を $\Delta x = \Delta y = 0.01, 0 \leq x, y \leq 1$ とし , 離散点の数は $N_x = 101, N_y = 101$ とする . 時間幅は $\Delta t = 0.001, 0 \leq t \leq 10$ とする . 初期条件として

$$\begin{aligned}u(x, y, 0) &= \exp\left(-\frac{(x - L/2)^2 + (y - L/2)^2}{0.1^2}\right), \\v(x, y, 0) &= 0\end{aligned}$$

を用いよ . また , パラメータを変化させることによって様々な波をシミュレーションして比較せよ .

3.3 実験課題 3 : 障害物の存在する波動現象

領域の内部に境界を作ることによって , 障害物を配置することができる . これを用いて波の回折を確認せよ .

3.4 実験課題 4 : 二重スリットでの干渉縞

波を用いた有名な実験としてヤングの実験がある . これは , 光の波動性を示した実験であるが , 本実験課題では波の干渉を二重スリットを用いて再現する . 実験課題 2 と実験課題 3 を組み合わせて以下の図で示される状況を再現し , 干渉縞を再現せよ . その際 , $y = 0.8[\text{m}]$ での波が定常波になっていることを確認すること . 境界条件として , 以下の式で示される無反射境界条件 [1] を使用せよ . また , パラメータを様々に変えて干渉縞の変化を確認せよ .

$$\begin{aligned}u_{1,j}^{(t+1)} &= u_{1,j}^{(t)} + v \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{2,j}^{(t)} - u_{1,j}^{(t)}), \\u_{N_x,j}^{(t+1)} &= u_{N_x,j}^{(t)} - v \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{N_x,j}^{(t)} - u_{N_x-1,j}^{(t)}), \\u_{i,1}^{(t+1)} &= u_{i,1}^{(t)} + v \frac{\Delta t}{\Delta y} (u_{i,2}^{(t)} - u_{i,1}^{(t)}), \\u_{i,N_y}^{(t+1)} &= u_{i,N_y}^{(t)} - v \frac{\Delta t}{\Delta y} (u_{i,N_y}^{(t)} - u_{i,N_y-1}^{(t)}).\end{aligned}$$

参考文献

- [1] Robert W. Clayton and Björn Engquist, Absorbing boundary conditions for wave-equation migration, GEOPHYSICS. Vol. 45, No. 5, p.p. 895-904, 1980

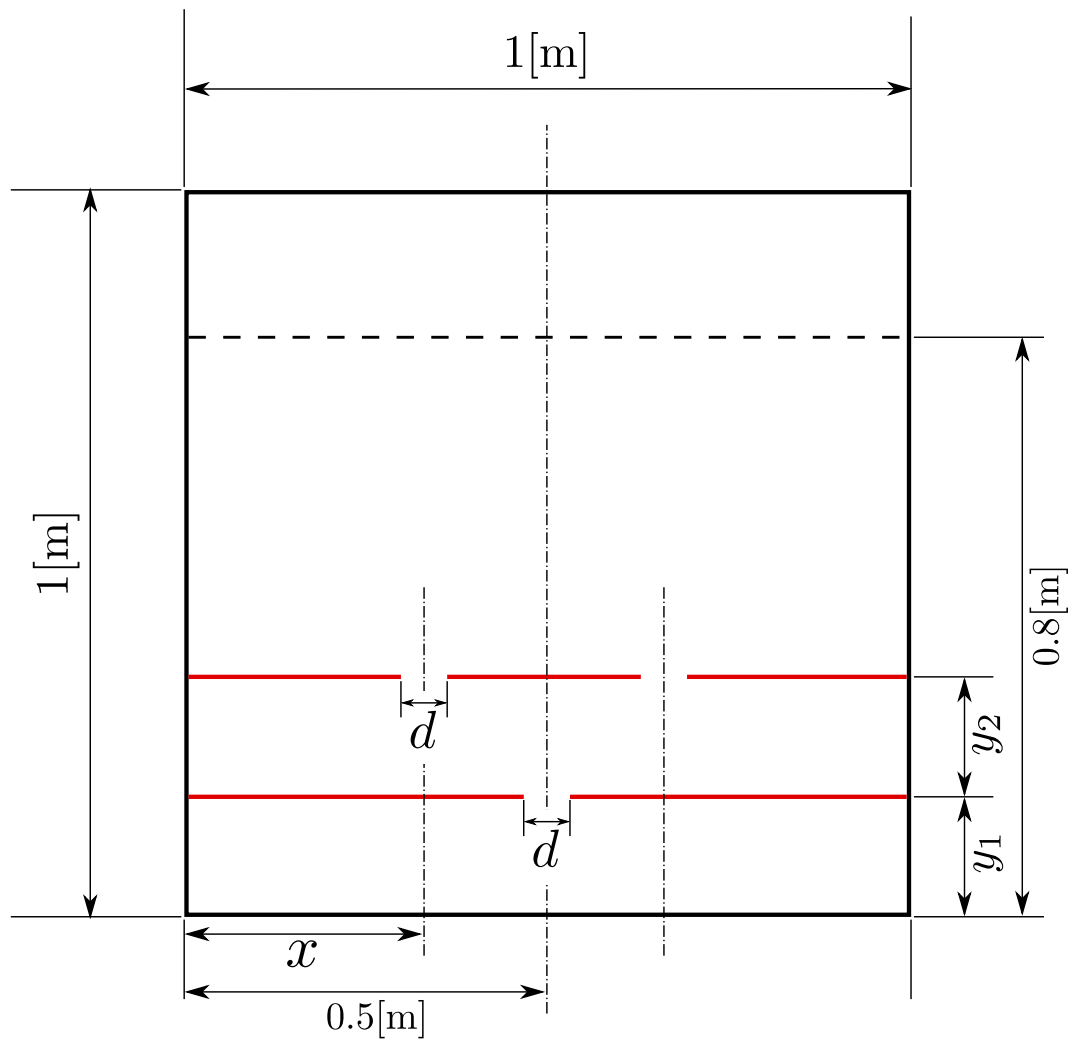


図 1: 二重スリットの実験概要図